

38-AMALIY MASHG'ULOT

Ish vaqti va bosqichlari	O'qituvchi faoliyatining mazmuni	Talabalar faoliyatining mazmuni
I-Bosqich O'quv mashg'ulotiga kirish (10 daqiqa)	1.1. Mashg'ulot mavzusi bo'yicha tushuncha berish. 1.2. Mavzuning avvalgi o'tilgan mavzu bilan aloqadorligi bo'yicha tushuncha berish	Tinglaydilar, yozadilar
II-Bosqich Asosiy (65 daqiqa)	2.1. Amaliy mashg'ulot mavzusiga oid nazariy ma'lumot berish. 2.2. Mavzuga oid amaliy topshiriqlar bajarish.	Tinglaydilar, yozadilar, savollar beradi, bajaradilar.
III-Bosqich Yakunlovchi (5 daqiqa)	3.1. Amaliy mashg'ulotni yakunlash 3.2. Talabalarga mustaqil bajarish uchun topshiriqlar berish.	Tinglaydilar, yozadilar, savollar beradi, bajaradilar.

38-MAVZU: KOMBINATORIKA ELEMENTLARI

Kombinatorika elementlari

Bir qator amaliy masalalarni yechish uchun berilgan to'plamdan uning qandaydir xossaga ega bo'lgan elementlarini tanlab olish va ularni ma'lum bir tartibda joylashtirishga to'g'ri keladi.

Ta'rif. Biror chekli to'plam elementlari ichida ma'lum bir xossaga ega bo'lgan elementlaridan iborat qism to'plamlarni tanlab olish yoki to'plam elementlarini ma'lum bir tartibda joylashtirish bilan bog'liq masalalar kombinatorik masalalar deyiladi.

Ta'rif. Kombinatorik masalalar bilan shug'ullanadigan matematik fan kombinatorika deyiladi.

Qo'shish qoidasi. Agar biror α tanlovni $m(\alpha)$ usulda, β tanlovni $m(\beta)$ usulda amalga oshirish mumkin bo'lsa va bu yerda α tanlovni ixtiyoriy tanlash usuli β tanlovni ixtiyoriy tanlash usulidan farq qilsa, u holda " α yoki β " tanlovni amalga oshirish usullari soni $m(\alpha \text{ yoki } \beta) = m(\alpha) + m(\beta)$ formuladan topiladi.

Ko'paytirish qoidasi. Agar biror α tanlovni $m(\alpha)$ usulda, β tanlovni $m(\beta)$ usulda amalga oshirish mumkin bo'lsa, u holda " α va β " tanlovni (yoki (α, β) juftlikni) amalga oshirish usullari soni $m(\alpha \text{ va } \beta) = m(\alpha) \cdot m(\beta)$ formuladan topiladi.

Kombinatorik masalalarni yechishda ko'p qo'llaniladigan tushunchalardan biri o'rin almashtirish tushunchasidir.

Ta'rif. Chekli va n ta elementdan iborat to'planning barcha elementlarini faqat joylashish tartibini o'zgartirib qism to'plam hosil qilish n elementli o'rin almashtirish deb ataladi.

Berilgan n ta elementdan tashkil topadigan o'rin almashtirishlar soni P_n bilan belgilanadi.

Teorema. n ta elementdan iborat o'rin almashtirishlar soni $P_n = n!$ formula bilan hisoblanadi.

Ta'rif. Chekli va n ta elementli to'planning k ($k < n$) ta elementli va kamida bitta element bilan farqlanadigan qism to'plam hosil qilish n elementdan k ta olingan kombinatsiya deyiladi.

Masalan, $\{a, b, c\}$ ko'rinishdagi $n = 3$ elementli to'plamdan ikkita elementli kombinatsiyalar $\{a; b\}$, $\{a; c\}$, $\{b; c\}$ bo'lib, ularning soni 3 tadir. Bu yerda $\{b; a\} = \{a; b\}$, $\{a; c\} = \{c; a\}$, $\{b; c\} = \{c; b\}$ deb olinadi.

n ta elementdan k tadan olingan kombinatsiyalar soni C_n^k kabi belgilanadi va uning qiymati $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ formula yordamida hisoblanadi.

Bu formula orqali kiritilgan C_n^k sonlar yordamida quyidagi tenglikni yozish mumkin:

$$(a + b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k.$$

Agar Nyuton binomida $a = b = 1$ yoki $a = 1, b = -1$ deb olsak, unda $\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$, $\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = 0$ tengliklar o'rinli bo'ladi.

Agar formulada k o'rniga $n - k$ qo'yilsa yoki $k = 0$ yoki $k = n$ deb olinsa, unda $C_n^k = C_n^{n-k}$, $C_n^0 = C_n^n = 1$ tengliklar hosil bo'ladi. Bular kombinatsiyalarni hisoblashni osonlashtiradi.

Ta'rif. Chekli va n ta elementdan iborat to'plamdan bir-biridan yoki elementlari yoki elementlarining joylashish tartibi bilan farq qiladigan va k ta elementdan iborat qism to'plamlarni hosil qilish n elementdan k tadan o'rinlashtirish deb ataladi.

Berilgan n ta elementdan k tadan o'rinlashtirishlar soni A_n^k kabi belgilanadi va uning qiymati

$A_n^k = n(n-1)(n-2) \dots [n-(k-1)]$ yoki $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ formula bilan hisoblanadi.

Masalan, $\{a, b, c\}$ to'plamdan $n = 3$ elementdan $k = 2$ tadan o'rinlashtirishlar $\{a; b\}$, $\{b; a\}$, $\{a; c\}$, $\{c; a\}$, $\{b; c\}$, $\{c; b\}$ bo'lib, ularning soni $A_3^2 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ yoki $A_3^2 = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{6}{1} = 6$.

1. Nazoratchi korxonada ishlab chiqarilgan 5 ta maxsulot sifatini ketma-ket tekshirishi kerak. Nazoratchi buni nechta usulda amalga oshirishi mumkin?

Yechish: Bu 5 ta maxsulot sifatini ketma-ket tekshirishlar 5 tadan o'rinlashtirishlardan iborat.

Ya'ni, $P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ bo'ladi.

2. Ishlab chiqarish korxonasini tekshirish uchun besh kishidan iborat guruh ajratildi. Shu besh kishidan tarkibida uch kishi bo'lgan guruhni necha xil usulda tuzish mumkin.

Yechish: $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ formuladan foydalanamiz. Bizda $n = 5$, $k = 3$ bo'lgani uchun $C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} = \frac{20}{2} = 10$.

3. Tikuvchilik fabrikasida ishlayotgan xodimga haftaning ixtiyoriy ikki kunini dam olish uchun tanlash imkoni berildi. Xodim dam olish kunlarini necha usulda tanlashi mumkin?

Yechish: Hafta kunlarini $n = 7$ elementli $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ to'plam sifatida qarasak, dam olish kunlari $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, ... kabi juftliklardan iborat bo'ladi. Bunda $\{i, j\}$ va $\{j, i\}$ bitta variantni ifodalaydi. Demak, dam olish kunlarini tanlash $n = 7$ elementdan $k = 2$ tadan kombinatsiyalarni tashkil etadi va ularning soni $C_7^2 = \frac{7!}{2!(7-2)!} = \frac{7!}{2!5!} = \frac{6 \cdot 7}{1 \cdot 2} = \frac{42}{2} = 21$ bo'ladi.

4. Talaba 4 ta fan bo'yicha qo'shimcha tayyorlanish uchun ularning har biriga haftaning bir kunini ajratmoqchi bo'ldi. Talaba hafta kunlarini fanlarga necha usulda taqsimlashi mumkin?

Yechish: Talabani I-IV fanlari uchun haftaning tanlagan kunlarini $k = 4$ ta elementli $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ to'plam, hafta kunlarini esa $n = 7$ elementlidan iborat $H = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ to'plam sifatida qaraymiz. Bu holda $X \subset H$ bo'lib, uni hosil etish $n = 7$ elementlidan $k = 4$ tadan o'rinlashtirishlarga mos keladi, chunki bu holda elementlarning joylashishi tartibi ham ahamiyatga ega. Masalan, $\{2, 4, 6, 7\}$ taqsimotda birinchi fanga dushanba (2), ikkinchi fanga chorshanba (4), uchinchi fanga juma (6) va to'rtinchi fanga shanba (7) kunlari ajratilgan bo'ladi. Unda $\{4, 2, 6, 7\}$, $\{6, 4, 2, 7\}$ kabilar turlicha taqsimotlarni ifodalaydi. Demak, talaba fanlarga hafta kunlarini

$$A_7^4 = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7!}{3!} = 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 840 \text{ usulda tanlashi mumkin.}$$

Misollar va masalalar

1. Xorijiy tillar fakulteti ingliz tili yo'nalishining birinchi kursida 10 ta fan o'qitiladi va har kuni 4 xil dars o'tiladi. Kunlik dars necha usul bilan taqsimlab qo'yilishi mumkin?
2. Butun sonlarning har biri uchta har xil qiymatli raqamlar bilan ifoda qilinadigan bo'lsa, qancha butun son tuzish mumkin?